Séance 1 — 47 min environ, hors vérification. Document du professeur, jamais distribué. Les élèves suivent sur le cours complet, sans recopier, et repèrent les numéros cités. Aucune calculatrice.

Page de garde — Partie 1 *1 min*

Anecdote Newton rédige sa méthode des fluxions en 1671, mais le traité ne paraît qu'en 1736, en traduction anglaise, neuf ans après sa mort : le premier « formulaire » de dérivation a attendu soixante-cinq ans son éditeur. *(I. Newton,* The Method of Fluxions and Infinite Series*, trad. J. Colson, 1736)*

Du local au global — le tableau *2 min*

Au tableau Rappel du chapitre précédent, fonction carré en 1 : $\dfrac{(1+h)^2-1^2}{h}=2+h$, donc $f'(1)=2$. De même en 2 : $\dfrac{(2+h)^2-2^2}{h}=\dfrac{4h+h^2}{h}=4+h$, donc $f'(2)=4$; en 3 : $6+h$, donc $f'(3)=6$. Conjecture : $f'(x)=2x$.

Du local au global — $f'(x)=2x$ (démonstration) *4 min*

Au tableau $\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\dfrac{2xh+h^2}{h}=\dfrac{h(2x+h)}{h}=2x+h$, qui tend vers $2x$: $f'(x)=2x$.
On retrouve $f'(1)=2$, $f'(2)=4$, $f'(3)=6$; et sans nouveau calcul de taux : $f'(5)=10$, $f'(-4)=-8$.

I. Définition — fonction dérivée *3 min*

Au tableau $f : x \longmapsto x^2$ et $f' : x \longmapsto 2x$. $f'(3)=6$ est un *nombre* ; f' est une *fonction*.

Anecdote Le mot « dérivée » et la notation f' viennent de Lagrange (1797). Le titre de son livre annonce un calcul différentiel « dégagé de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissants, de limites ou de fluxions » : il voulait définir f' sans aucune limite. *(J.-L. Lagrange,* Théorie des fonctions analytiques*, 1797)*

I. Rappel — racine carrée et valeur absolue en 0 *2 min*

Au tableau $\dfrac{\sqrt{h}-0}{h}=\dfrac{1}{\sqrt{h}}$: aussi grand qu'on veut. $\dfrac{|h|-0}{h}$ vaut 1 si $h>0$ et -1 si $h<0$: deux valeurs.
Conséquence : racine carrée *définie* sur $[0\,;+\infty[$, *dérivable* sur $]0\,;+\infty[$.

II. Théorème 1 — dérivées de référence *4 min*

Au tableau Lire la ligne x^n : $n=2$ donne $2x^1=2x$; $n=3$ donne $3x^2$; $n=1$ donne $1\times x^0=1$. Deux essais : $x^5 \longmapsto 5x^4$ et $\dfrac{1}{x^3} \longmapsto -\dfrac{3}{x^4}$.

Anecdote Avec $\dfrac{1}{x^n}=x^{-n}$, la dernière ligne redonne la formule $n\,x^{n-1}$ pour un exposant négatif : $x^{-3} \longmapsto -3x^{-4}$. Les exposants négatifs et fractionnaires sont interprétés par Wallis en 1656 ; Newton les adopte et en généralise l'usage. *(J. Wallis,* Arithmetica infinitorum*, 1656 ; F. Cajori,* A History of Mathematical Notations*, 1928)*

II. Fonction inverse (démonstration exigible) *5 min*

Au tableau $\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x}{x(x+h)}-\dfrac{x+h}{x(x+h)}=\dfrac{-h}{x(x+h)}$; on divise par h : $-\dfrac{1}{x(x+h)}$, qui tend vers $-\dfrac{1}{x^2}$.
Contrôle en $x=2$: $f'(2)=-\dfrac{1}{4}$. Le signe moins : la courbe de la fonction inverse descend partout.

II. Exemple 1 — *3 min*

Au tableau $f_1'(x) = 0$; $f_2'(x) = 2x$; $f_3'(x) = 4x^3$; $f_4'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$; $f_5'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$.

III. Dérivée d'une somme — *4 min*

Au tableau $f' = u' + v'$. Deux exemples illustratifs (ils ne sont pas sur la diapositive) :
si $f(x) = x^2 + x$ alors $f'(x) = 2x + 1$;
si $f(x) = x^3 + x + 1$ alors $f'(x) = 3x^2 + 1 + 0 = 3x^2 + 1$, donc $f'(5) = 3 \times 5^2 + 1 = 3 \times 25 + 1 = 76$.
Plus aucun taux de variation à calculer.

III. Théorème 2 — opérations — *3 min*

Au tableau Piège : $(u\,v)' \neq u'\,v'$. Contre-exemple : $u(x) = v(x) = x$; alors $u(x)\,v(x) = x^2$ a pour dérivée $2x$, alors que $u'(x)\,v'(x) = 1 \times 1 = 1$. Avec la formule : $1 \times x + x \times 1 = 2x$.

Anecdote En octobre 1684, Leibniz publie en six pages les règles de dérivation d'une somme, d'un produit, d'un quotient, des puissances et des racines. Le titre promet une méthode « que n'arrêtent ni les quantités fractionnaires ni les irrationnelles ». *(G. W. Leibniz,* Nova methodus pro maximis et minimis, *Acta Eruditorum, 1684)*

III. Dérivée d'un produit (démonstration exigible) — *5 min*

Au tableau Numérateur : $u(x+h)\,v(x+h)$ $\boldsymbol{-\,u(x)\,v(x+h) + u(x)\,v(x+h)}$ $-u(x)\,v(x)$, puis on factorise par $v(x+h)$ à gauche et par $u(x)$ à droite : $\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h} \times v(x+h) + u(x) \times \dfrac{v(x+h)-v(x)}{h}$, qui tend vers $u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$.

Anecdote Leibniz lui-même a hésité : dans un manuscrit du 11 novembre 1675, il se demande si la différentielle d'un produit est le produit des différentielles, puis constate que non ; la règle correcte apparaît dans un manuscrit du 21 novembre. *(C. H. Edwards,* The Historical Development of the Calculus, *1979)*

III. Exemple 2 — *4 min*

Au tableau $f_1'(x) = 1 + 0 = 1$; $f_2'(x) = 2x - 1$; $f_3'(x) = 4 \times 1 = 4$;
$f_4'(x) = 2x + 5 \times 1 + 0 = 2x + 5$; $f_5'(x) = 4x^3 + \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 4x^3 - \dfrac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$.

III. Exemple 3 — un produit — *3 min*

Au tableau $u(x) = 2x + 3$, $v(x) = 3x - 7$, $u'(x) = 2$, $v'(x) = 3$.
$f'(x) = 2(3x - 7) + (2x + 3) \times 3 = 6x - 14 + 6x + 9 = 12x - 5$.
Contrôle en développant d'abord : $f(x) = 6x^2 - 5x - 21$, d'où $f'(x) = 12x - 5$.

III. Exemple 4 — un quotient — *4 min*

Au tableau $u(x) = x + 1$, $v(x) = 2x - 3$, $u'(x) = 1$, $v'(x) = 2$.
$f'(x) = \dfrac{1 \times (2x-3) - (x+1) \times 2}{(2x-3)^2} = \dfrac{2x - 3 - 2x - 2}{(2x-3)^2} = \dfrac{-5}{(2x-3)^2} = -\dfrac{5}{(2x-3)^2}$.
Parenthèses autour de $(x+1) \times 2$ avant de distribuer le signe moins ; on ne développe pas le dénominateur.